

Műszaki hőtan II. – Matematikai emlékeztető

Szücs Máttyás

2018. szeptember 1.

1. Előszó

Ez a segédlet a BME-n Gépészmérnök és Energetikai mérnök hallgatók számára tartott Műszaki hőtan II. tárgyhoz szükséges matematikai ismereteket foglalja össze. Az itt leírtak többsége már ismert tananyag, így nyomatékosan felhívjuk a figyelmet, hogy ha valakinek hiányosságai vannak, az idejében pótolja.

2. Geometria

2.1. Henger és gömb felszíne, térfogata

A henger térfogata és felszíne az 1. ábra jelöléseivel (továbbá $d = 2r$):

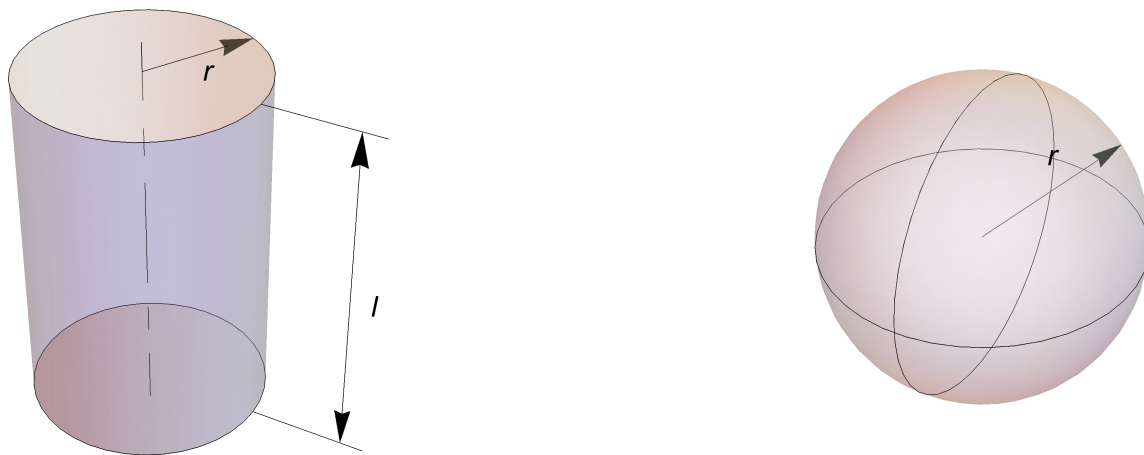
$$V = \pi r^2 l = \frac{\pi}{4} d^2 l, \quad (1)$$

$$A = \underbrace{2\pi r l}_{\text{palástfelület}} + 2 \underbrace{\pi r^2}_{\text{alap/fedlap felülete}}. \quad (2)$$

A gömb térfogata és felszíne az 1. ábra jelöléseivel (továbbá $d = 2r$):

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{\pi}{6} d^3, \quad (3)$$

$$A = 4\pi r^2 = \pi d^2. \quad (4)$$



2-1. ábra. Balra: henger. Jobbra: gömb.

Hasznos megjegyezni, hogy a gömb felszíne és térfogata, ill. a hengerpalást felszíne és a henger térfogata között az alábbi kapcsolatok érvényesek:

$$A(r) = \frac{d}{dr} V(r), \quad V(r) = \int_0^r A(\tilde{r}) d\tilde{r}. \quad (5)$$

A térfogat és a felület hányadosa hosszdimenziójú mennyiség. Ennek segítségével definiálható az ún. **egyenértékű** vagy **effektív sugár**:

$$R_{\text{eff}} := f \frac{V}{A}, \quad (6)$$

ahol f a dimenziótlan, ún. alaktényező – másképpen végességi számnak is nevezhetnénk, ugyanis megmutatja, hogy az adott objektumot hány irányban tekintjük végesnek. Az alaktényezőt tranziens hővezetés esetén fogjuk használni, méghozzá a Biot-szám definiálásához. Ekkor a felület alatt a hőátadó felületet fogjuk érteni. Nézzük a legfontosabb eseteket:

- Két irányban végtelen kiterjedésű, δ vastagságú síkfal, hőátadás mindkét oldalon – $f = 1$:

$$R_{\text{eff}} = f \frac{V}{A} = \frac{\delta A}{2A} = \frac{\delta}{2}. \quad (7)$$

- Végtelen hosszúságú, R sugarú henger, hőátadás a teljes hengerpaláston – $f = 2$:

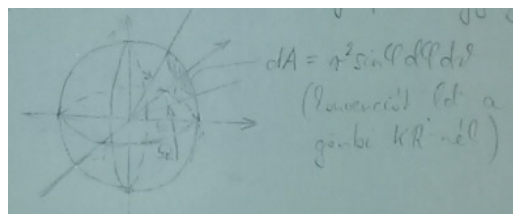
$$R_{\text{eff}} = f \frac{V}{A} = 2 \frac{\pi r^2 L}{2\pi r L} = r. \quad (8)$$

- R sugarú gömb, hőátadás a gömb teljes felszínén – $f = 3$:

$$R_{\text{eff}} = f \frac{V}{A} = 3 \frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{4\pi r^2} = r. \quad (9)$$

2.2. Térszög

A térszög a jól ismert síkbeli szög általánosítása. Egy kúp Ω térszögén a kúp által az egységgömb felszínéből kimetszett felületet értjük (ld. 2. ábra), mértékegysége a szteradián, jelölésben [sr]. A [sr] ugyanúgy az egységet jelöli, mint síkbeli szögek esetén a [rad]. Ezek szerint a teljes térszög az egység



2-2. ábra. A térszög értelmezése.

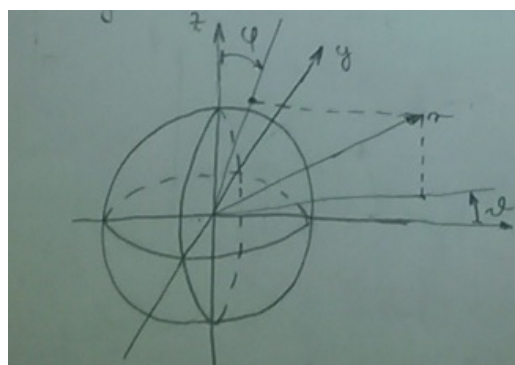
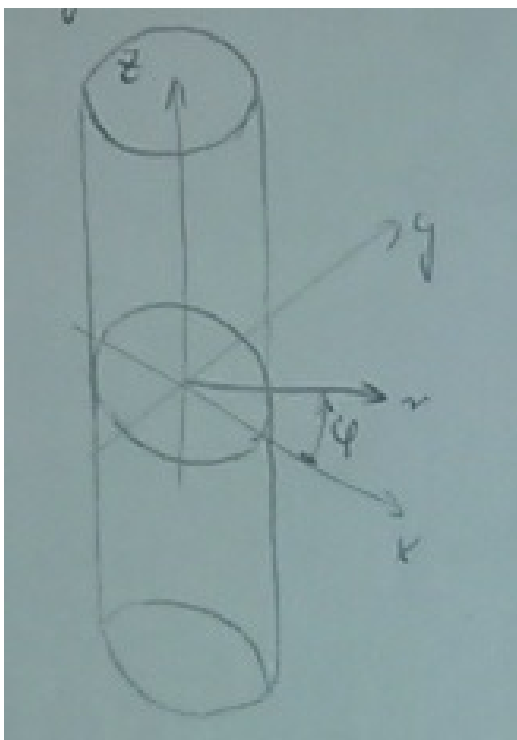
sugarú gömb felszíne, melyre integrálással az

$$A = \int_{\text{Sphere}} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \varphi d\varphi d\vartheta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi r^2, \quad (10)$$

eredményt kapjuk, ebbe $r = 1$ -et helyettesítve a teljes térszög tehát 4π . A féltér térszöge $\Omega = 2\pi$, térnegyedé $\Omega = \pi$, a térfelcádé $\Omega = \frac{\pi}{2}$, stb. Az elemi térszög $d\Omega = (1 \cdot) \sin \varphi d\varphi d\vartheta$ (vö. 2. ábrán dA -val).

3. Henger- és gömbi koordinátarendszerek

Célszerű az egyes feladatok megoldásához a feladat geometriájához legjobban illeszkedő koordinátarendszert választani. A következőkben megadjuk a Descartes-koordinátarendszer és a henger-, ill. a gömbi koordinátarendszerek áttérési transzformációkat, a koordinátázások értelmezési tartományait és szinguláris pontjait. Ezen koordinátarendszerek ortogonálisak, azaz helyileg az egységvektorok egymásra merőlegesek.



3-3. ábra. Balra: hengerkoordináta-rendszer. Jobbra: gömb.

3.1. Hengerkoordináta-rendszer

A hengerkoordináta-rendszer használata az r, φ, z konvenciót javasolja (ld. 3. ábrát). A Descartes-féle és a hengerkoordináta-rendszer közötti áttérési transzformációk:

$$x = r \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (11)$$

$$y = r \sin \varphi, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad (12)$$

$$z = z, \quad z = z, \quad (13)$$

ahol $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ és $z \in \mathbb{R}$. Az $r = 0$ koordinátájú pontok (azaz az origó és a z -tengely pontjai) kivételével minden pont egyértelműen leírható a $\{r, \varphi, z\}$ koordinátákkal, azonban az $r = 0$ -ban a koordinátázás nem hű, mivel ezt végtelen sok φ szögkoordinátával jellemezhetnénk, tehát az $r = 0$ koordinátájú pontok nem egyértelműek.

3.2. Gömbi koordináta-rendszer

Gömbi koordináta-rendszerben a r, ϑ, φ koordinátákat használjuk (ld. 3. ábrát). A Descartes-féle és a gömbi koordináta-rendszer közötti áttérési transzformációk:

$$x = r \sin \varphi \cos \vartheta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (14)$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \vartheta = \arctan \frac{y}{x}, \quad (15)$$

$$z = r \cos \varphi, \quad \varphi = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad (16)$$

ahol $r \in (0, \infty)$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$ és $\varphi \in (0, \pi)$. Gömbi koordináta-rendszer esetében az $r = 0$, a $\varphi = 0$, és a $\varphi = \pi$ koordinátájú pontok (az origó és a z -tengely pontjai) kivételével minden pont egyértelműen leírható a $\{r, \vartheta, \varphi\}$ koordinátákkal.

4. Differenciálszámítás

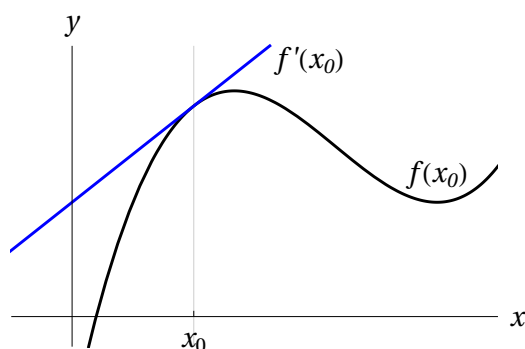
4.1. Deriválás

A derivált a matematikai analízis egyik legalapvetőbb fogalma, mely megmutatja, hogy egy egyváltozós valós függvény grafikonjához pontról-pontra berajzolt érintője milyen meredekségű. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy egyváltozós valós függvény, ennek az x_0 pontbeli deriváltja (vagy másnéven differenciálhányadosa)

$$\frac{df}{dx}(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv \dot{f}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (17)$$

amennyiben a határérték létezik és véges. Az első jelölés Lagrangetól, a második Leibniztól, míg harmadik Newtontól származik. Utóbbi kettővel kapcsolatban jegyezzük meg a következőt: a fizikában gyakran a vesszőt az egyetlen helyváltozó szerinti deriválásra, míg a pontot az időváltozó szerinti deriválásra szokás használni.

Megjegyzés: Fizikai mennyiségeknek mérőszámaikon kívül dimenziójuk is van, így a fizikában használt függvények nem egyszerűen a valós számokról a valós számokra képeznek, hanem úgynevezett mértékegyenesekről mértékegyenesekre. Ha pl. \mathbb{T} jelöli az idő, \mathbb{L} pedig a hossz mértékegyenesét, akkor a függvényt, melynek változója az idő és értéke sebességdimenziójú, a $\mathbb{T} \rightarrow \frac{\mathbb{L}}{\mathbb{T}}$ leképezés jelöli.



4-4. ábra. A derivált geometriai jelentése.

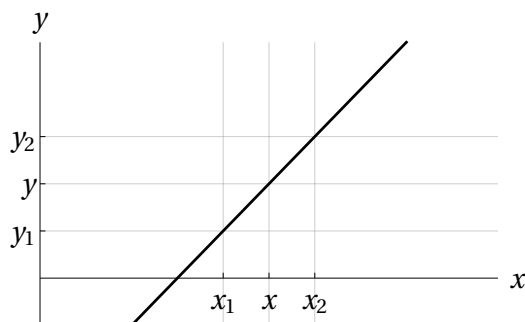
A derivált szemléletesen tehát az f függvény x_0 pontbeli érintőjének meredeksége (ld. 4. ábrát), másképpen egy függvény lineárisan történő közelítése egy x_0 pontjának egy környezetében. Ehhez kapcsolódó gondolat a **lineáris interpoláció**. A lineáris interpoláció kiemelt szerepű a mérnöki gyakorlatban, ugyanis sokszor egy függvényt nem a hozzárendelési szabályával, hanem bizonyos pontokhoz tartozó függvényértékeivel adnak meg (pl. mérési adatsorok). Ha egy olyan ponthoz van szükségünk értékre, amelyek az alappontok között nem szerepel, a legegyszerűbben ehhez a ponthoz tartozó függvényértéket lineáris interpoláció segítségével határozhatjuk meg. Tegyük fel, hogy ismeretek az x_1 és x_2 alappontokhoz tartozó y_1 és y_2 függvényértékek. Keressük az $x \in [x_1, x_2]$ alapponthoz tartozó függvényértéket. Az 5. ábráról könnyen megállapíthatjuk, hogy az (x_1, y_1) – (x, y) – (x, y) és (x_1, y_1) – (x_2, y_1) – (x_2, y_2) derékszögű háromszögek egybevágók, így az

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (18)$$

egyenlőséget írhatjuk fel. Ezt átrendezve az x alapponthoz tartozó függvényértékre az

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad (19)$$

összefüggést kapjuk. Javasolt a gondolatmenet és a háromszögek hasonlóságának megjegyzése, így a (18) képletet könnyen fel tudjuk írni, majd akár y függvényértéket, vagy akár az x függvényérték ismeretében a x alappontot egyszerűen ki tudjuk fejezni (18)-ból.



4-5. ábra. A lineáris interpoláció szemléltetése.

A deriválás műveleti tulajdonságai:

$$\begin{aligned} [c \cdot f(x)]' &= c \cdot f'(x) && (c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges konstans}), \\ [f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x), \\ [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \\ \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \\ [f \circ g(x)]' &\equiv [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned} \quad (20)$$

Fontosabb függvények deriváltjai:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} & (n \in \mathbb{R}) \\ \sin' x &= \cos x, \\ \cos' x &= -\sin x, \\ (e^x)' &= e^x, \\ \ln' x &= \frac{1}{x}, \\ \sinh' x &= \cosh x, \\ \cosh' x &= \sinh x.\end{aligned}\tag{21}$$

Tekintsük pl. az $\ln\left(\frac{x}{c}\right)$ függvény ($c \in \mathbb{R}$) deriváltját. Itt $f = \ln$ valamint $g = \frac{x}{c}$, azaz a deriválást a láncszabály szerint kell végeznünk:

$$\ln'\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{\frac{x}{c}} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{c}\right)}{dx} = \frac{c}{x} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{x},\tag{22}$$

másképpen a logaritmusra vonatkozó $\ln\left(\frac{x}{c}\right) = \ln x - \ln c$ azonosság felhasználásával

$$\ln'\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{d}{dx}(\ln x - \ln c) = \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x}.\tag{23}$$

4.2. Parciális deriválás

Parciális deriválnak nevezzük a többváltozós függvények olyan deriváltját, amikor a függvényt egyetlen változójának egyváltozós függvényeként tekintjük, miközben többi változóját konstansnak vesszük és a „nemkonstans” változója szerint deriváljuk. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy n változós skálár értékű függvény, azaz $f = f(x_1, \dots, x_n)$, ezen függvény x_k ($k \in \{1, \dots, n\}$) szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \equiv \partial_{x_k} f \equiv \partial_k f \equiv \underbrace{f'_{x_k} \equiv f'_k}_{\text{kerülendő jelölések}} := \left. \frac{df}{dx_k} \right|_{x_j = \text{const} (k \neq j = 1 \dots n) \text{ esetén}}.\tag{24}$$

Példa: Képezzük az $f(x, y, z) := x^2 \cdot e^z \cdot \sin y$ minden lehetséges parciális deriváltját!

$$\partial_x f = 2x \cdot e^z \cdot \sin y, \quad \partial_y f = x^2 \cdot e^z \cdot \cos y, \quad \partial_z f = x^2 \cdot e^z \cdot \sin y.\tag{25}$$

4.3. Nevezetes differenciáloperátorok

A továbbiakban ún. mezőket tekintünk, melyek egy tér vagy térrész pontjaihoz rendelnek mennyiségeket. Fizikai ismereteinkből tudjuk, hogy ezek a mennyiségek lehetnek skaláris, vektoriális vagy tenzoriális mennyiségek. A hőmérsékletmező pl. skalármennyiség, ui. pl. egy szoba minden egyes pontjának megmérhetjük a hőmérsékletét, mely egy mérőszámból és egy mértékegységből áll össze, míg egy áramló folyadék sebességmezője már vektoriális mennyiség, itt a folyadék minden egyes pontjához egy-egy vektort rendelhetünk, mely az adott pont sebességét adja meg. Példa tenzoriális mennyiségre a feszültség vagy az alakváltozási mező (ld. pl. szilárdságtan). További általánosítás céljából célszerű a skalár mennyiségeket nulladrendű, a vektoriális mennyiségeket elsőrendű tenzoroknak nevezni, míg a tenzoriális mennyiségek alatt a másodrendű tenzorokat értjük, azonban további, magasabbrendű tenzorok is léteznek.

A továbbiakban olyan mezőket tekintünk, melyek értelmezési tartománya a háromdimenziós tér – azaz három független változótól függenek –, ugyanakkor a most következő differenciáloperátorok – a rotáció kivételével – magasabb dimenziós értelmezési tartományra (azaz több változóra) is értelmezhetők. A lenti differenciáloperátorok invariánsak, azonban alakjuk különböző koordinátarendszerekben reprezentálva más és más, most a derékszögű Descartes-féle koordinátarendszerben adjuk meg őket.

4.3.1. Skalárfüggvény gradiense

Egy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező gradiensén a

$$\text{grad} f = \nabla f = \partial_k f = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \quad (26)$$

kifejezést értjük, ahol ∇ a nabla-operátor, mely formálisan egy vektornak tekinthető. Fizikailag a gradiens a legnagyobb növekedés irányába mutató vektormezőt adja. Figyeljük meg, hogy a gradiens egy skalármezőből egy vektormezőt képzett.

4.3.2. Vektorfüggvény gradiense

Tekintsük az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezőt, ennek gradiensén (szokás ezt továbbá deriválttenzornak vagy deriváltmátrixnak is nevezni) a

$$\text{grad } \mathbf{u} = \mathbf{u} \otimes \overleftarrow{\nabla} = \partial_l u_k = (\partial u)_{kl} = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \partial_y u_x & \partial_z u_x \\ \partial_x u_y & \partial_y u_y & \partial_z u_y \\ \partial_x u_z & \partial_y u_z & \partial_z u_z \end{pmatrix} \quad (27)$$

kifejezést értjük, ahol \otimes vektorok diadikus vagy tenzoriális szorzását jelöli. A kontinuumelméletekben legtöbbször jobboldali gradienst, divergenciát, rotációt, ... szokás képezni, erre utal a balra mutató nyíl a nabla operátor fölött, az indexes jelölésmódban a jobboldali ill. a baloldali gradiens közti különbség könnyen megérthető:

$$\partial_l u_k = \mathbf{u} \otimes \overleftarrow{\nabla} = \left(\overrightarrow{\nabla} \otimes \mathbf{u} \right)^T = \partial_k u_l, \quad (28)$$

ahol T a transzponáltat jelöli. Ismét megfigyelhetjük, hogy a gradiens egy vektorból egy tenzort képzett, tehát ismét növekedett a tenzori rend.

4.3.3. Vektorfüggvény divergenciája

Az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező divergenciáján a gradiensének első skalárinvariánsát értjük, azaz

$$\text{div } \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \overleftarrow{\nabla} = \text{tr} \left(\mathbf{u} \otimes \overleftarrow{\nabla} \right) = \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k, \quad (29)$$

ahol tr a trace- vagy nyomoperátort jelöli (német nyelvterületen szokás a sp használata, mely a Spur , azaz nyom szóból ered), mely a legegyszerűbben egy mátrix főátlójában álló elemek összegeként számolható ki. Látható, hogy jelen esetben nincs különbség a jobb- ill. a baloldali divergencia között,

azonban másodrendű tenzorok divergenciája esetén már van különbség. Kontinuumelméletekben szokásos alkalmazni az Einstein-féle összegzési konvenciót, mely szerint az azonos indexekre szumma jel nélkül, automatikusan összegzés történik, azaz

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k = \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z. \quad (30)$$

Láthatjuk, hogy a divergencia egy vektorból skalárt képzett, azaz csökkentette a tenzori rendet.

A divergencia fizika szempontból a vektormező forrásosságát jellemzi, amennyiben egy vektormező divergenciája nulla, akkor a vektormező forrásmentes, tehát sem források, sem nyelők nem találhatóak benne.

4.3.4. Vektorfüggvény rotációja

Ugyan a Műszaki hőtan II. tárgyban a rotáció közvetlenül nem kerül elő, viszont a teljesség kedvéért röviden írunk erről is.

Az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező rotációján a gradiensek vektorinvariánsát értjük, azaz

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \overleftarrow{\nabla} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} \partial_m u_l = \epsilon_{klm} \partial_m u_l, \quad (31)$$

ahol az utolsó egyenlőségénél ismételten használtuk az összegzési konvenciót, valamint \times a vektoriális szorzást jelöli, ezek szerint ugyanúgy, mint a vektoriális szorzás, a rotáció is csak 3 dimenzióban értelmezhető. (31)-ben ϵ_{klm} a teljesen antiszimmetrikus harmadrendű tenzort, vagy másnéven a Levi-Civita- vagy a permutációs szimbólumot jelöli, mely

$$\epsilon_{klm} = \begin{cases} +1, & \text{ha } klm \text{ páros permutációjú, azaz } klm = 123, 231, 312, \\ -1, & \text{ha } klm \text{ páratlan permutációjú, azaz } klm = 213, 321, 132, \\ 0, & \text{minden más esetben.} \end{cases} \quad (32)$$

Ezek alapján könnyen megalkothatjuk a rotáció derékszögű koordináta-rendszerbeli reprezentációját:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_z u_y - \partial_y u_z \\ \partial_x u_z - \partial_z u_x \\ \partial_y u_x - \partial_x u_y \end{pmatrix}. \quad (33)$$

A rotációnál ismételten fontos, hogy jobb- vagy baloldalt képzünk, ugyanis a vektoriális szorzás tulajdonságából adódóan

$$\mathbf{u} \times \overleftarrow{\nabla} = -\overrightarrow{\nabla} \times \mathbf{u}. \quad (34)$$

Megfigyelhetjük, hogy a rotáció vektorhoz vektort rendelt, tehát nem változtatta meg a tenzori rendet.

Fizikailag a rotáció egy vektormező örvényességét jellemzi. Ha egy vektormező rotációja nulla, akkor az a vektormező örvénymentes. Az ilyen vektormezők ún. skalárpotenciálokból gradiensképzéssel származtathatók, melyek használata sokszor megkönnyíti a számolásokat.

4.3.5. A Laplace-operátor

Egy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skálármezőre a Laplace-operátort a következőképpen értelmezzük:

$$\Delta f = \sum_{k=1}^3 \partial_k \partial_k f = \partial_k \partial_k f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f, \quad (35)$$

ahol ismét az Einstein-konvenciót használtuk. A Laplace-operátor skalárból skalárt képzett, hasonlóan értelmezhető magasabbrendű tenzormezőkre is, nem változtatja meg a tenzoriális rendet. Például az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezőre

$$\Delta \mathbf{u} = \partial_k \partial_k u_j = \begin{pmatrix} \partial_x^2 u_x + \partial_y^2 u_x + \partial_z^2 u_x \\ \partial_x^2 u_y + \partial_y^2 u_y + \partial_z^2 u_y \\ \partial_x^2 u_z + \partial_y^2 u_z + \partial_z^2 u_z \end{pmatrix}. \quad (36)$$

A fizikában általában egy mező gradiensének divergenciájaként szokott előkerülni:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{tr}[\operatorname{grad}(\operatorname{grad} f)] = \operatorname{tr}[\partial_k (\partial_l f)] = \operatorname{tr}(\partial_k \partial_l f) = \partial_k \partial_k f = \Delta f, \quad (37)$$

ld. pl. a hővezetési egyenletnél.

4.3.6. Általános megjegyzések

Általánosságban megjegyezhető, hogy a

- **gradiens** eggyel növeli a tenzori rendet;
- **divergencia** eggyel csökkenti a tenzori rendet;
- **rotáció** és a **Laplace-operátor** nem változtatja meg a tenzori rendet.

Továbbá, amint ezen rész elején említettük a rotáció kivételével a fenti differenciáloperátorok nemcsak három, hanem több változóra is kiterjeszthetők, azonban az antiszimmetrikus tenzorszorzat segítségével a rotáció is általánosítható, így lényegében ez is értelmezhető több változós mezőkre is.

4.3.7. Differenciáloperátorok henger és gömbi koordinátarendszerben

A Műszaki hőtan II. tárgyban használt differenciáloperátorok (gradiens, divergencia és Laplace operátor) henger koordinátarendszerben:

$$\operatorname{grad} f(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \partial_r f \\ \frac{1}{r} \partial_\varphi f \\ \partial_z f \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(r, \varphi, z) = \partial_r u_r + \frac{1}{r} (u_r + \partial_\varphi u_\varphi) + \partial_z u_z, \quad (39)$$

$$\Delta f(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f, \quad (40)$$

gömbi koordinátarendszerben pedig:

$$\operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r f \\ \frac{1}{r} \partial_\vartheta f \\ \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi f \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(r, \vartheta, \varphi) = \partial_r u_r + \frac{1}{r} (2u_r + \partial_\vartheta u_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\cos \vartheta u_\vartheta + \partial_\varphi u_\varphi), \quad (42)$$

$$\Delta f(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta [\sin \vartheta \partial_\vartheta f] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 f. \quad (43)$$

Megjegyzés: A henger és gömbi koordinátarendszerekben megadott differenciáloperátoroknál elegendő a radiális részre koncentrálnunk, mivel a Műszaki hőtan II. tárgyon olyan feladatokkal fogunk találkozni, melyek csak sugárfüggőek. Ezeket jegyezzük meg fejből is:

$$\Delta f(r, \varphi, z) = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) = \partial_r^2 f + \frac{1}{r} \partial_r f, \quad (44)$$

$$\Delta f(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \partial_x (r^2 \partial_r f) = \partial_r^2 f + \frac{2}{r} \partial_r f \quad (45)$$

Továbbá az f alaktényező segítségével az egydimenziós Laplace-operátort (azaz Descartes-koordinátarendszerben az x függő, henger és gömbi koordinátarendszerekben pedig csak az r -től függő rész, ezen x és r változókat most együttesen ξ -vel fogjuk jelölni) egységesen a

$$\Delta g(\xi) = \frac{1}{\xi^{f-1}} \partial_\xi (\xi^{f-1} \partial_\xi g) \quad (46)$$

alakban írhatunk (vö. az előzőkkel).

4.4. Teljes differenciál

Tekintsük pl. az $f = f(x, y, z)$ többváltozós skalárértékű függvényt. Ezen függvény teljes differenciálján a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (47)$$

kifejezést értjük. Egy \mathbf{r} vektorváltozójú skalárértékű függvény teljes differenciálja

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}, \quad (48)$$

vö. (47)-tel Descartes-koordinátákban.

A teljes differenciálnak van persze matematikailag precízebb definíciója is, azonban számunkra elegendő a szemléletes értelmezése is: a teljes differenciál megmutatja, hogy ha „egy kicsit” odébb megyünk a függvény változóinak terében, akkor mennyit változik a függvénynek az értéke.

5. Integrálás

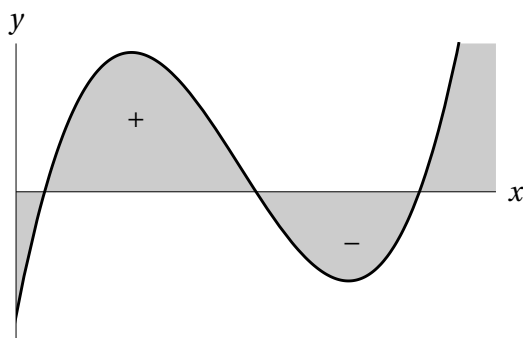
Az integrálás a deriválás inverz művelete. Szemléletesen az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skalárértékű valós függvény integrálja a függvény grafikonja és az x -tengely által határolt előjeles terület, az x -tengely fölötti részt pozitív, míg az x -tengely alatti részt negatív előjellel tekintjük (ld. 6. ábra). Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **határozatlan integrálján** (az integrálási határok nincsenek meghatározva) az

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad (49)$$

kifejezést értjük, ahol $F'(x) = f(x)$, valamint $c \in \mathbb{R}$ egy integrálási konstans.

Amennyiben adott az integrálás tartománya, akkor az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **határozott integrálását** a Newton–Leibniz-szabály szerint az

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) \quad (50)$$



5-6. ábra. Az integrálás, mint a függvény alatti terület.

összefüggéssel számolhatjuk. Amennyiben egy adott x_1 alapponttól egy x változóig integrálunk, akkor

$$\int_{x_1}^x f(s)ds = F(x) - F(x_1). \quad (51)$$

Azért, hogy az integrálási változó és az integrálási határ ne akadjon össze, a függvény x változóját egy s változóra cseréltük, ezt jelölhetjük pl. a \hat{x} , \tilde{x} , ξ , ... jelölésekkel is.

Műveleti tulajdonságok:

$$\int c f(x)dx = c \int f(x)dx \quad (c \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges konstans}), \quad (52)$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \quad (53)$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \quad (54)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \left| \frac{f(x)}{f_0} \right| + c. \quad (55)$$

(54)-et parciális integrálásnak nevezzük. Általában (55) jobb oldalát a $\ln |f(x)| + c$ alakban szokták megadni, azonban fizikai szempontból ez problémákat von maga után. A \ln , e , \sin , \cos , ... függvények argumentumába csak dimenziótlan mennyiségek kerülhetnek (indoklást ld. Taylor-sorfejtésnél). Ha az $f(x)$ egy fizikai mennyiségek, akkor dimenziója is van, így egy azonos dimenziójú, tetszőleges f_0 mennyiséggel azt le kell osztanunk, hogy dimenziótlan mennyiség kerüljön az argumentumba. Azonban ez továbbra is csak egy független konstans jelent, más f_0 választása esetén a c integrálási konstans más értéket fog felvenni. Sokszor a feladat maga kínál egy célszerű f_0 egységet.

6. Taylor-sorok

Taylor-sor alatt a függvények egy speciális hatványsorba fejtését értjük. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Taylor-sora az x_0 pont környezetében a

$$\begin{aligned} T_{x_0}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \cdot (x - x_0)^k = \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (56)$$

A sort tetszőleges $k = N$ -nél csonkolhatjuk, ekkor a függvény N -ed rendű közelítését adjuk. Speciálisan, a nulla középpontú Taylor-sort MacLaurin-sornak nevezzük:

$$T_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k f}{dx^k}(0) \cdot x^k. \quad (57)$$

Tekintsük pl. az $f(x) = \sin x$ függvény Taylor-sorát a nulla körül:

$$f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1, \quad (58)$$

$$f''(0) = -\sin 0 = 0, \quad f'''(0) = -\cos 0 = -1, \quad (59)$$

ezt folytatva, majd az (56) képletbe beírva és rendezve

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \end{aligned} \quad (60)$$

Mint azt már írtuk, több függvény, közte a \sin függvény argumentumába csak dimenziótlan mennyiségek kerülhetnek, ugyanis pl. ha egy hossz dimenziójú mennyiségnek akarnánk venni a szinuszt, akkor ennek Taylor-sorfejtése alapján $[m] + [m^3] + [m^5] + \dots$, azaz különböző dimenziójú mennyiségeket kellene összeadnunk, amely értelmetlen.

Tekintsünk néhány egyszerű példát a Taylor-sorfejtés alkalmazására!

Az $f(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^p$ ($p \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$) elsőrendű közelítése $|\varepsilon| \ll 1$ esetén $1 + p\varepsilon$, ugyanis $\varepsilon = 0$ körüli Taylor-sorának nullad és első rendű tagjának együtthatói $f(0) = 1$ és $\frac{df}{d\varepsilon}(0) = p$, így $(1 + \varepsilon)^p \cong 1 + p\varepsilon$. Számos esetben így gyorsan kaphatunk megfelelően pontos közelítést, mely számolást akár fejben is elvégezhetjük. Amennyiben az $f(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)^p$ függvény teljes Taylor-sorfejtését elvégezzük, akkor az ún. binomiális sort kapjuk.

Adjuk meg az $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvény határértékét a nullában! Mivel ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így a L'Hospital szabállyal érhetünk célt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left. \frac{(\sin x)'}{x'} \right|_{x=0} = \left. \frac{\cos x}{1} \right|_{x=0} = \frac{1}{1} = 1. \quad (61)$$

Ezt az eredményt ugyanakkor a $\frac{\sin x}{x}$ függvény nulla körüli nullad rendű sorfejtésével is megkaphatjuk. A \sin függvény Taylor-sorának első tagja x , míg x Taylor-sorfejtése önmaga, így

$$\frac{\sin x}{x} \cong \frac{x}{x} = 1. \quad (62)$$

A Taylor-sorfejtésre egy másik, mérnöki is fontos példa nemlineáris differenciálegyenletek linearizálása (differenciálegyenleteket ld. később). Tekintsük pl. a

$$\frac{dT(t)}{dt} = -c [T^4(t) - T_{\infty}^4] \quad (63)$$

differenciálegyenletet, mely egy koncentrált paraméterűnek modellezett test hőmérsékleti sugárzás által okozott felmelegedését írja le az idő függvényében, itt $T(t)$ a test, míg T_{∞} az (állandónak tekintett) környezet hőmérséklete, c pedig fizikai tartalommal bíró konstans (a Stefan–Boltzmann-állandó, a feketeségi fok és a sugárzást érő felület szorzata). Ez egy nemlineáris differenciálegyenlet, megoldása bonyodalmas. Amennyiben a test és környezetének hőmérséklete között nincs számottevő különbség (ezt illene precízebben definiálni), akkor a jobb oldalt T_{∞} körül első rendig Taylor-sorba fejtve a

$$\frac{dT(t)}{dt} = -4cT_{\infty}^3 [T(t) - T_{\infty}] \quad (64)$$

lineáris egyenletre jutunk, melyet már könnyedén meg tudunk oldani.

6.1. Néhány szemléletformáló megjegyzés

Nemcsak hatványfüggvények szerinti kifejtések léteznek (mint például a Taylor-sor), hanem további hasznos kifejtések is: keressünk adott feladathoz illeszkedő alkalmas függvényrendszert a kifejtéshez.

- A Fourier-sor (ill. -transzformáció) $\sin(kx)$ és $\cos(kx)$, azaz e^{ikx} (itt k egész szám, $i = \sqrt{-1}$ pedig az imaginárius egység) függvények szerinti kifejtést valósítja meg. Parciális differenciál-egyenleknél gyakran előkerül, ugyanis az előbbi függvények a Laplace-operátor saját függvényei téglalatest tartományon (ld. tranziens hővezetés).
- A Laplace-transzformáció hasonlóan a Fourier-transzformációhoz e^{-st} függvények szerinti kifejtést ad meg, ahol $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}$). Ezzel e^{-st} az Euler-formula segítségével az $e^{-\sigma t}[\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$ alakra hozható, mely szerint időbeli lecsengések szerinti kifejtést valósítunk meg (pl. mechanikában a rezgési módusok). A Laplace-transzformáció használata az irányítástechnikában, elektrotechnikában és jelfeldolgozásban gyakori.
- Speciális geometriákhoz illeszkedő kifejtések:
 - Gömbszimmetrikus feladatok esetén a Legendre-polinomok és a gömbfüggvények.
 - Hengerszimmetrikus feladatok esetén a Bessel-függvények (ld. később).
- További speciális kifejtések:
 - A valószínűségszámításban és numerikus módszerekben gyakran alkalmazzák a Csebisev-polinomokat.
 - A kvantummechanikában az Hermite-polinomok (ejtsd: ermit) kerülnek elő.
 - A végeselem módszerben a formafüggvények, míg a képfeldolgozásban a waveletek töltenek be hasonló szerepet.

7. Néhány függvény, amelyre szükség lesz

Ebben a szakaszban (többnyire felsorolás-szerűen) megadjuk és felrajzoljuk azon függvényeket és legfontosabb tulajdonságaikat, melyeket használni fogunk.

7.1. Exponenciális függvény

Az exponenciális függvényt az $\exp(x)$ vagy e^x szimbólummal jelöljük, grafikonját a 7. ábrán látható.

Fontosabb értékei:

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e \cong 2,7182\dots, \quad (65)$$

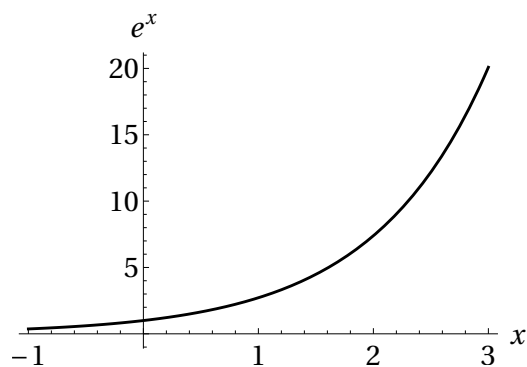
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad (66)$$

továbbá egy jól megjegyezhető értéke (praktikus megjegyezni!)

$$e^3 \cong 20 \quad (e^3 = 20,0855 \text{ hibája } 5\% \text{ alatt van}). \quad (67)$$

Az exponenciális függvény deriváltja önmaga:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad (68)$$



7-7. ábra. Az exponenciális függvény grafikonja.

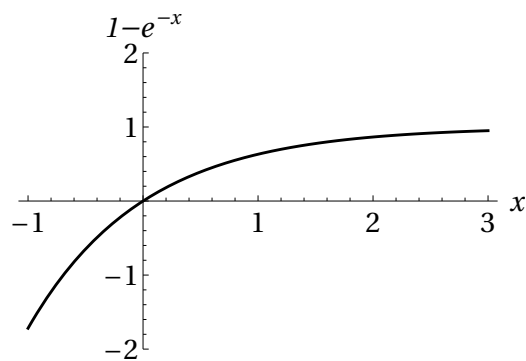
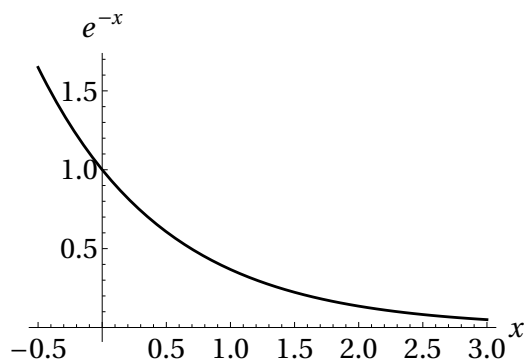
továbbá néhány fontosabb összetett függvényének a deriváltja:

$$\frac{d}{dx}e^{cx} = ce^{cx} \quad (c \in \mathbb{R}), \quad \frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}. \quad (69)$$

Az exponenciális függvény Taylor-sora a nulla körül:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (70)$$

Hőcserélőkben a hőmérséklet különbséget az e^{-x} függvény jellemzi, míg a koncentrált paraméterű rendszerek időbeli felmelegedését (pl. ahogyan a hűtőből kivett sör felmelegszik) az $1 - e^{-x}$ függvénnyel arányos (grafikonjaikat ld. a 8. ábrán).



7-8. ábra. Balra: az e^{-x} függvény grafikonja. Jobbra: az $1 - e^{-x}$ függvény grafikonja.

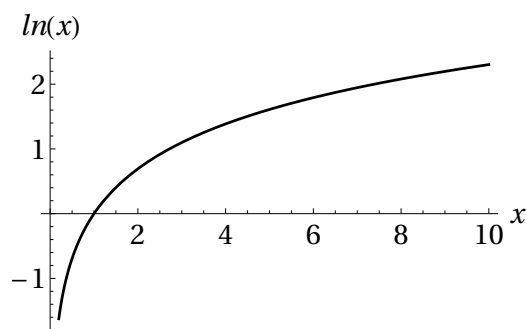
7.2. Természetes alapú logaritmus függvénye

Az $\ln : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmus függvény (ld. 9. ábra) az exponenciális függvény inverze, tehát

$$e^{\ln x} = x, \quad \ln(e^x) = x. \quad (71)$$

Valós változók esetén értelmezési tartománya tehát a nemnegatív valós számok. Nevezetes értékei:

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} = \infty. \quad (72)$$



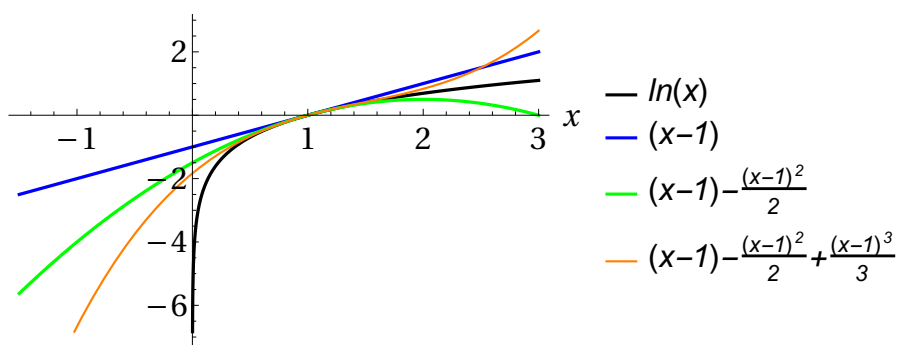
7-9. ábra. A \ln függvény grafikonja.

A logaritmus függvény Taylor-sorát a $\ln(1 + y)$ nulla körüli Taylor sorából kaphatjuk meg:

$$\ln(1 + y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} y^k = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots, \quad (73)$$

ez a $-1 < y \leq 1$ tartományon ad jó közelítést (vö. 10. ábrával), az $y := x - 1$ helyettesítéssel élve

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x - 1)^k = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \dots \quad (74)$$



7-10. ábra. Az \ln függvény, első, másod és harmad rendű grafikonja.

7.3. Hiperbolikus függvények

A hiperbolikus függvények exponenciális függvények lineáris kombinációi. Számos tulajdonságukban hasonlóságot mutatnak a trigonometrikus függvényekkel. Jelöléseik a német nyelvterületen sh, ch, th, míg az angolszász nyelvterleteken sinh, cosh, tanh.

A hiperbolikus függvényekkel és ezek lineáris kombinációival a hűtőbordák hossz menti hőmérséklet megoszlásánál fogunk találkozni.

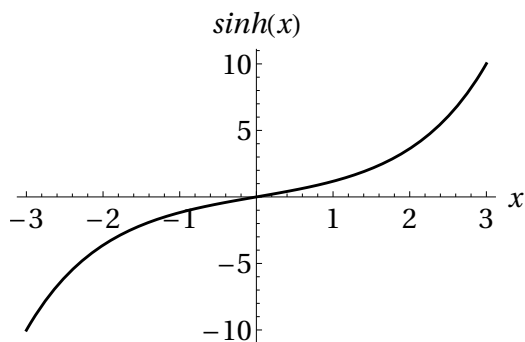
7.3.1. A sinh függvény

A sinh függvény grafikonját a 11. ábra mutatja, definíciója:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (75)$$

melyről könnyen belátható, hogy páratlan függvény, azaz $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, fontosabb értékei:

$$\sinh(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty. \quad (76)$$



7-11. ábra. A sinh függvény grafikonja.

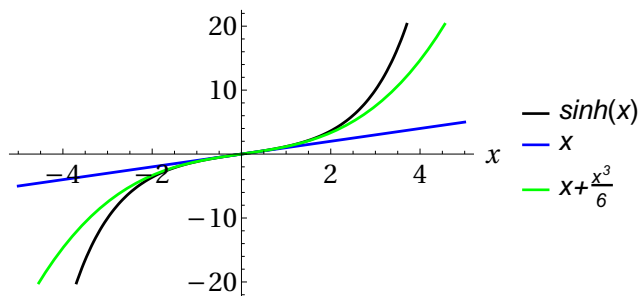
Aszimptotikus (végtelen beli) viselkedése:

$$x \rightarrow \infty : \quad \sinh x \cong \frac{1}{2}e^x, \quad x \rightarrow -\infty : \quad \sinh x \cong -\frac{1}{2}e^x \quad (77)$$

mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$. Taylor-sora a nulla körül:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (78)$$

A Taylor-sorfejtésnek egy további haszna, hogy függvényekről könnyedén eldönthetjük, hogy a kezdeti lineáris szakasz után a függvény melyik irányba fog görbülni, ld. 12. ábrán.



7-12. ábra. A sinh függvény, valamint első és harmad rendű Taylor-sorának grafikonja.

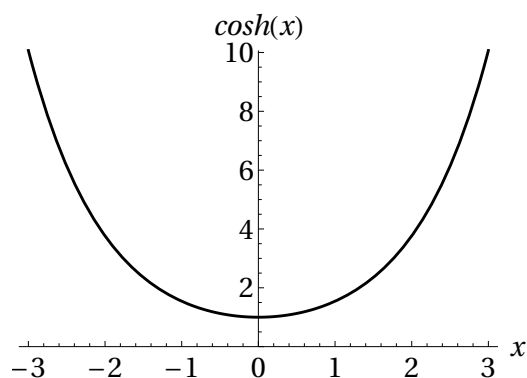
7.3.2. A cosh függvény

A cosh függvény grafikonját a 13. ábra mutatja, definíciója:

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (79)$$

melyről könnyen belátható, hogy páros függvény, azaz $\cosh(-x) = \cosh(x)$, fontosabb értékei:

$$\cosh(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh x = \infty. \quad (80)$$



7-13. ábra. A cosh függvény grafikonja.

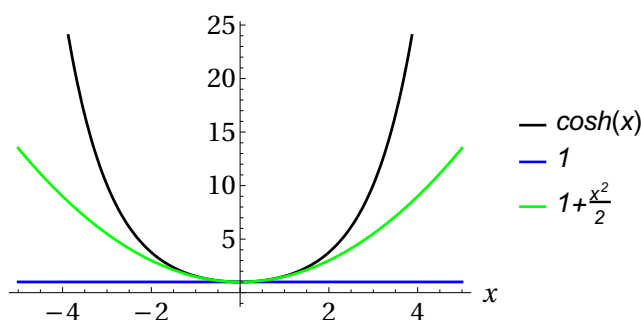
Aszimptotikus (végtelen beli) viselkedése:

$$x \rightarrow \pm\infty : \cosh x \cong \frac{1}{2}e^x, \quad (81)$$

mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$. Taylor-sora a nulla körül:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \quad (82)$$

A cosh függvény nullad és másod rendű Taylor-sora a 14. ábrán látható.



7-14. ábra. A cosh függvény, valamint nullad és másod rendű Taylor-sorának grafikonja.

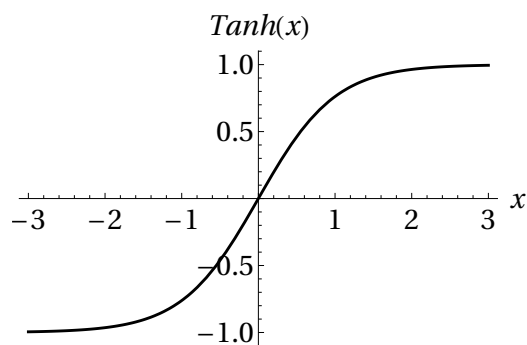
7.3.3. A tanh függvény

Hasonlóan a tangens függvényhez, a függvényt (grafikonját a 15. ábra mutatja) a sinh és cosh függvények hányadosaként definiáljuk:

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \quad (83)$$

A tanh függvény páratlan, mivel egy páratlan és egy páros függvény hányadosa, azaz $\tanh(-x) = -\tanh(x)$, fontosabb értékei:

$$\tanh(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1. \quad (84)$$

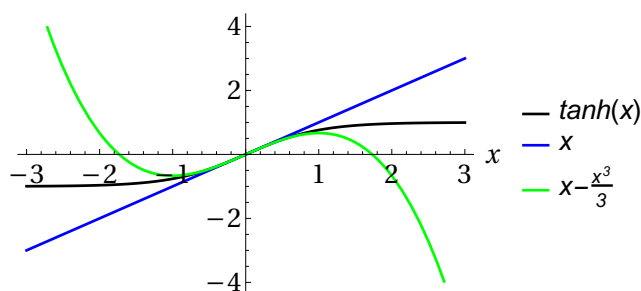


7-15. ábra. A tanh függvény grafikonja.

Taylor-sora a nulla körül:

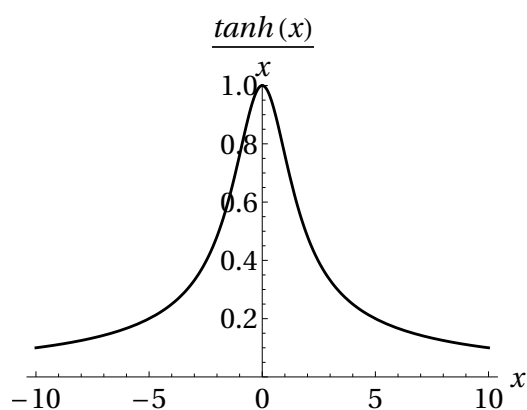
$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \dots \quad (85)$$

A tanh függvény első és harmad rendű Taylor-sora a 16. ábrán látható.



7-16. ábra. A tanh függvény, valamint első és harmad rendű Taylor-sorának grafikonja.

Hűtőbordák hatásfokának számításához fogjuk használni a $\frac{\tanh x}{x}$ függvényt, melyet a 17. ábra szemléltet. Lássuk ennek néhány jellegzetességét! Fontosabb értékei:



7-17. ábra. A $\frac{\tanh x}{x}$ függvény grafikonja.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\tanh x}{x} = 0. \quad (86)$$

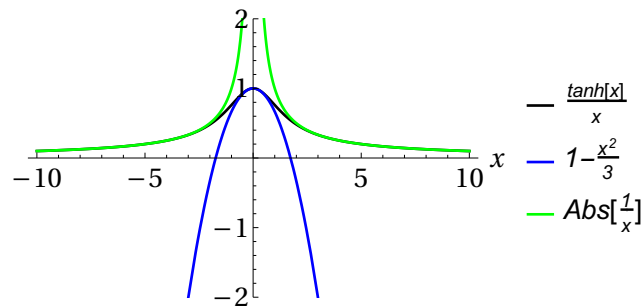
Aszimptotikus (végtelen körüli) viselkedése:

$$x \rightarrow \pm\infty : \frac{\tanh x}{x} \cong \frac{1}{x}, \quad (87)$$

mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1$. Taylor-sora a nulla körül:

$$\frac{\tanh x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \dots \quad (88)$$

A $\frac{\tanh x}{x}$ függvényt, másod rendű Taylor-sorát, valamint asimptotikus viselkedését a 18. ábra mutatja.



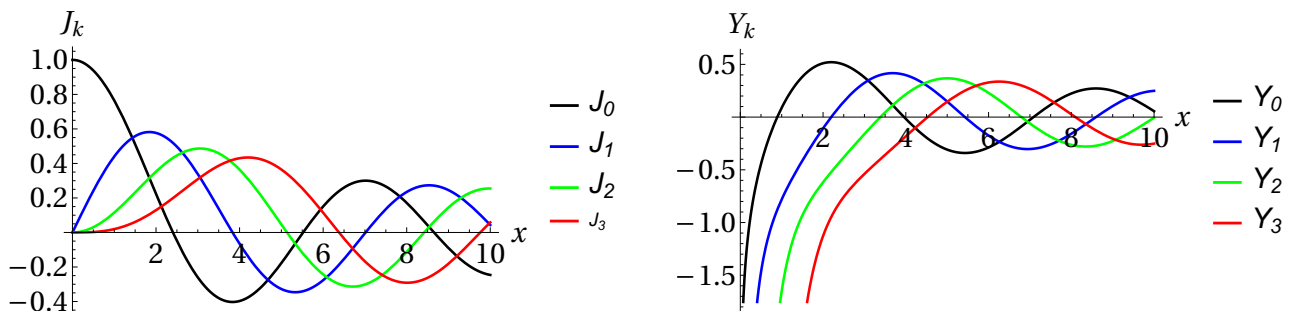
7-18. ábra. A $\frac{\tanh x}{x}$ függvény, másod rendű Taylor-sora és asimptotikus viselkedése.

7.4. Bessel-függvények

A Bessel-függvények hengeres geometriák esetén fordulnak elő, a sin és a cos függvényekhez hasonlók; oszcillálnak, azonban nem egyenletes amplitúdával és periódussal. A

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (89)$$

ún. k -ad rendű Bessel-féle differenciálegyenlet megoldásai a $J_k(x)$ elsőfajú k -ad rendű és az $Y_k(x)$ másodfajú k -ad rendű Bessel-függvények (ld. 19. ábrát). Hengeres geometriák tranziens hővezetése esetén fogunk ezekkel a függvényekkel találkozni, elegendő annyit megjegyezni, hogy $J_0(0) = 1$, $J_k(0) = 0$ ($\forall k > 0$) és $\lim_{x \rightarrow 0} Y_k(x) = -\infty$ ($\forall k$). Számoláshoz a szükséges Bessel-függvények értékei a *Segédlet – A hőtan tárgycsoporthoz 2015-ös kiadásának* 67. oldalán táblázatosan vannak megadva.



7-19. ábra. Az első és másodfajú Bessel-függvények grafikonjai.

7.5. Gauss-féle hibafüggvény

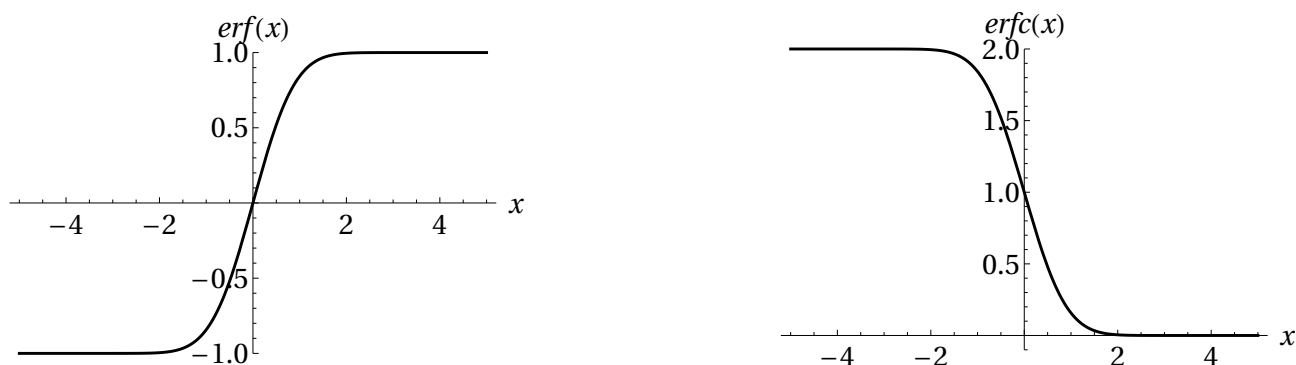
A Gauss-féle hibafüggvény definíciója:

$$\operatorname{erf}(x) := \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, & \text{ha } x \geq 0, \\ -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \quad (90)$$

mellyel a komplementer hibafüggvény:

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt. \quad (91)$$

Grafikonjaik a 20. ábrán láthatók. Fontosabb értékeik:



7-20. ábra. Balra: a hibafüggvény függvény grafikonja. Jobbra: a komplementer hibafüggvény grafikonja.

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{erf}(x) = -1, \quad (92)$$

$$\operatorname{erfc}(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{erfc}(x) = 2, \quad (93)$$

Az erfc aszimptotikus kifejtése („Taylor-sora az $x \rightarrow \infty$ körül”):

$$\operatorname{erfc}(x) \cong \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}. \quad (94)$$

Az erfc függvény egy hasznos közelítése:

$$\operatorname{erfc}(x) \cong e^{-x^2} \cdot \frac{1 + x(0,853 + 0,29x)}{1 + x[1,983 + x(1,515 + 0,514x)]}, \quad (95)$$

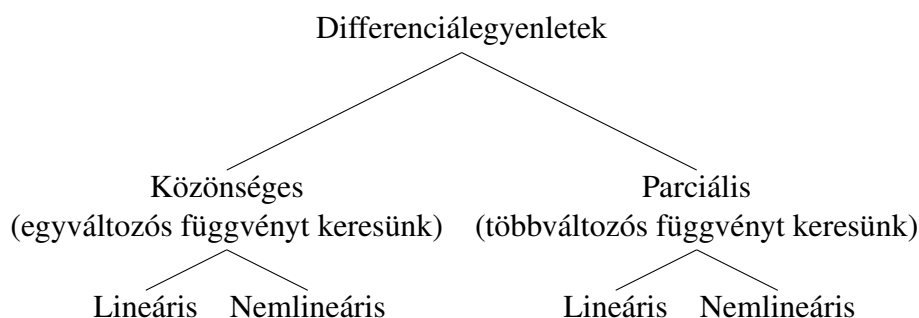
mely közelítés relatív hibája $< 10^{-4}$ az $[0, \infty)$ intervallumon. Ez a közelítés a *Segédlet – A hőtan tárgycsoport*hoz 2015-ös kiadásában nem szerepel, viszont a 64. oldalon számos értéke táblázatban numerikusan adott.

8. Differenciálegyenletek

Matematikai precizitás nélkül a differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyekben az ismeretlen egy differenciálható függvény, az egyenlet pedig ezt a keresett függvényt és ennek (parciális) deriváltjait

tartalmazza. A differenciálegyenletek a fizika legalapvetőbb eszközei, gondoljunk arra, hogy a fizikai törvények sokszor valamilyen hatás okozta változásokat írnak le, mely változásokat matematikailag deriváltakkal tudunk megfogalmazni.

Az alábbi ábra a differenciálegyenletek egyfajta, egyszerű csoportosítását mutatja:



A differenciálegyenlet rendjén az egyenletben megjelenő legmagasabb derivált fokát értjük. Ismervén, hogy a differenciálás inverz művelete az integrálás, így formálisan annyiszor integráljuk az egyenletet, amennyi a rendje, ekkor ugyanis „eltűnik” a legmagasabb derivált is. Így ahányszor integráltunk, annyi integrálási konstans jelenik meg a megoldásfüggvényben. Ezen konstansok rögzítéséről gondoskodnunk kell, hogy a fizikailag releváns megoldást kapjuk. Ezt a rögzítést a kezdeti és/vagy peremfeltételek segítségével tehetjük meg.

A **kezdeti feltétel** a kezdeti időpontban jellemzi a függvényt és szükséges idő szerinti deriváltjait, fizikailag ezzel a rendszer előéletét jellemezzük.

A **peremfeltétel** azon tartomány peremlein („szélein”) jellemzi a függvényt és szükséges tér szerinti deriváltjait, amely tartományon a differenciálegyenletet megoldjuk. Fizikailag a peremfeltétel a rendszer peremét érő külső hatásokat jellemzi.

Ezek szerint tehát annyi kezdeti és/vagy peremfeltételre van szükségünk, ahány integrálási konstansunk van, azaz ahányad rendű az egyenletünk.

A fizikai tartalmat illetően kezdetiérték-feladatról beszélünk, ha időbeli közönséges differenciálegyenletet kell megoldanunk, ekkor a kezdeti időpontban ismerjük a rendszer bizonyos jellemzőit. Peremérték feladat pl. az egydimenziós térbeli közönséges differenciálegyenlet, ahol az egydimenziós tartomány szélein ismertek a függvényértékek. Természetesen léteznek magasabb térdimenziós (tipikusan 3 dimenziós) peremérték-feladatok is, de ezeket már térbeli parciális differenciálegyenletekkel lehet leírni. Az idő- és térbeli parciális differenciálegyenletek (mint pl. a hővezetési egyenlet) megoldásához mind kezdeti, mind peremfeltételekre is szükség van, ezeket kezdeti-peremérték feladatoknak nevezzük.

A Műszaki Hőtan II. tárgyon elsőrendű szétválasztható, másodrendű közvetlenül integrálható, ill. homogén, lineáris, állandó együtthatós n -ed (pontosabban másod) rendű differenciálegyenletekre lesz szükségünk. A következőkben ezen egyenletek megoldását ismertetjük.

8.1. Elsőrendű szétválasztható kezdetiérték-feladat

Koncentrált paraméterű modellezés esetén (pl. arra kíváncsi a mérnökhallgató, hogy mennyi ideig hűtse a sörét, hogy az már kellemesen fogyasztható legyen, ekkor a térbeli változásokkal nem foglalkozik, pusztán az időre koncentrálna) egy test hőmérsékletének az időbeli változását a

$$\begin{cases} \dot{T}(t) &= -aT(t) \\ T(t_0) &= T_0 \end{cases} \quad (96)$$

elsőrendű kezdetiérték-feladattal adhatjuk meg, itt $a \in \mathbb{R}$ egy fizikai állandó (tartalmát ld. az előadásban). Mivel $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$, így átrendezve a differenciál egyenletet a

$$\frac{dT}{T} = -adt \quad (97)$$

kifejezésre jutunk. Láthatjuk, hogy a függő változó (T) csak a baloldalon, míg a független változó (t) csak a jobboldalon szerepel, ezért nevezzük az ilyen alakba írható egyenleteket szétválaszthatónak. Határozottan integrálva mindkét oldalt:

$$\int_{T_0}^T \frac{d\tilde{T}}{\tilde{T}} = \int_{t_0}^t -ad\tilde{t}, \quad (98)$$

azaz a

$$\ln \frac{T}{T_0} = -a(t - t_0) \quad (99)$$

összefüggésre jutunk. A határozott integrálásnak köszönhetően dimenzionális problémákba sem ütközünk. Véve (99) exponenciálisát, majd T_0 -lal átszorozva a hőmérséklet időfejlődésére a

$$T(t) = T_0 e^{-a(t-t_0)} \quad (100)$$

függvényt kapjuk. A kezdeti időpillanatot célszerűen nullának választjuk, így a megoldás a $T(t) = T_0 e^{-at}$ alakra egyszerűsödik.

8.2. Másodrendű közvetlenül integrálható peremérték-feladat

Tekintsünk egy λ hővezetési tényezőjű, végtelen kiterjedésű, δ vastagságú falat, melyben egyenletesen, \dot{q}_V nagyságú belső hő szabadul fel. A fal egyik oldalán, melynek koordinátája x_1 a hőmérséklet T_1 , míg másik oldalán, az $x_2 = x_1 + \delta$ helyen T_2 . A problémát Descartes-koordinátarendszerben a

$$\begin{cases} T''(x) &= -b, \\ T(x_1) &= T_1, \\ T(x_2) &= T_2 \end{cases} \quad (101)$$

peremérték-feladattal írhatjuk le, ahol $b = \frac{\dot{q}_V}{\lambda}$. Ez az egyenlet közvetlenül integrálható, ugyanis

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -b, \quad (102)$$

melyet x szerint integrálva

$$\int \frac{dT^2}{dx^2} dx = \int -b dx, \quad (103)$$

azaz

$$\frac{dT}{dx} = bx + c_1, \quad (104)$$

majd ismételten x szerint integrálva a hőmérséklet falvastagság menti megoszlására a

$$T(x) = -\frac{b}{2}x^2 + c_1x + c_2 \quad (105)$$

függvényt kapjuk, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ integrálási konstansok. Amíg a c_1 és c_2 határozatlanok, ez egy görbesereget jelent, melyben megbújik az egyetlen, fizikailag valós megoldásfüggvény. A konstansokat a peremfeltételekből tudjuk meghatározni:

$$T(x_1) = -\frac{b}{2}x_1^2 + c_1x_1 + c_2 = T_1, \quad (106)$$

$$T(x_2) = -\frac{b}{2}x_2^2 + c_1x_2 + c_2 = T_2. \quad (107)$$

Ezen két, immár algebrai egyenletet kell megoldani c_1 -re és c_2 -re, majd visszaírni a megoldásba. Vonjuk ki (106)-ból (107)-et, ekkor a

$$-\frac{b}{2}(x_1^2 + x_2^2) + c_1(x_1 - x_2) = T_2 - T_1 \quad (108)$$

egyenletre jutunk, majd felhasználva az $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ azonosságot

$$c_1 = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} + \frac{b}{2}(x_1 + x_2). \quad (109)$$

Szorozzuk meg (106)-ot x_2 -vel, majd vonjuk ki belőle (107) x_1 szeresét, így a

$$-\frac{b}{2}x_1x_2(x_1 - x_2) + c_2(x_2 - x_1) = T_1x_2 - T_2x_1 \quad (110)$$

kifejezést kapjuk, melyből

$$c_2 = \frac{T_1x_2 - T_2x_1}{x_2 - x_1} - \frac{b}{2}x_1x_2. \quad (111)$$

Ezeket visszaírva (105)-be a fizikailag releváns (azaz a peremfeltételekhez illeszkedő) megoldás:

$$T(x) = -\frac{b}{2}x^2 + \left[\frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} + \frac{b}{2}(x_1 + x_2) \right]x + \frac{T_1x_2 - T_2x_1}{x_2 - x_1} - \frac{b}{2}x_1x_2. \quad (112)$$

A koordináták célszerű megválasztásával egyszerűbb alakra juthatunk, pl. x_1 -et nullának választva:

$$T(x) = -\frac{b}{2}x^2 + \left[\frac{T_2 - T_1}{\delta} + \frac{b}{2}\delta \right]x + T_1. \quad (113)$$

Ha rögtön így kezdtünk volna, c_2 meghatározás igen egyszerű lett volna, ugyanis ekkor

$$T(0) = -\frac{b}{2} \cdot 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_2 = T_1. \quad (114)$$

Ne lepődjünk meg, hogy ebben a koordinátázásban mást kaptunk c_2 -re, mint az előbb, ugyanis az integrálási konstans értéke koordinátázásról koordinátázásra változik, azonban a megoldásfüggvényre nézve ez csak az x -tengely mentén való eltolást jelent.

8.3. Homogén, lineáris, állandó együtthatós n -ed rendű differenciálegyenletek

Homogén, lineáris, állandó együtthatós n -ed rendű differenciálegyenlet alatt a

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (115)$$

alakú egyenletet értjük, ahol a_k -k konstansok, n pedig tetszőleges egész szám. Keressük ezen egyenlet megoldását a $ce^{\mu x}$ függvény alakjában (itt $c \neq 0$, különben az egyenlet triviális megoldását kapjuk csak meg, ami nem feltétlenül illeszkedik a kezdeti vagy peremfeltételekhez). Behelyettesítve (115)-be az

$$(a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0) ce^{\mu x} = 0 \quad (116)$$

algebrai egyenletre jutunk, melyet a homogén, lineáris, állandó együtthatós n -ed rendű differenciál-egyenlet karakterisztikus egyenletének nevezünk. Mivel $e^{\mu x} \neq 0$, így

$$a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots + a_1 \mu + a_0 = 0, \quad (117)$$

azaz egy n -ed rendű polinom gyökeit keressük, mely polinom neve karakterisztikus polinom. Az algebra alaptétele szerint egy n -ed rendű polinomnak pontosan n gyöke van a komplex számok halmazán. Ha μ_1, \dots, μ_n jelöli a (117)-beli polinom gyökeit, akkor $ce^{\mu_1 x}, \dots, ce^{\mu_n x}$ függvények mindegyike megoldása (115)-nek. Mivel (115) lineáris, így az előző exponenciálisok lineáris kombinációja is megoldás, azaz a

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\mu_k x} \quad (118)$$

függvény alakjában keresendő az egyenlet teljes megoldása, melyben a c_k konstansok megfelelő megválasztása biztosítja a kezdeti vagy peremfeltételek teljesülését (pontosabban ezeket a konstansokat a kezdeti vagy peremfeltételekből határozzuk meg, hogy a fizikailag releváns megoldást kapjuk).

Tekintsük a

$$\begin{cases} \vartheta''(x) = m^2 \vartheta(x), \\ \vartheta(0) = \vartheta_0, \\ \vartheta'(h) = 0 \end{cases} \quad (119)$$

peremérték-feladatot, mely egy h hosszúságú állandó keresztmetszetű hűtőrúdbordában a hőmérséklet hossz menti megoszlását írja le, ahol m fizikai tartalommal bíró valós konstans (ún. bordaparaméter, ld. előadáson). Az első peremfeltétel a Ez egy homogén, lineáris, állandó együtthatós másod rendű differenciálegyenlet, ugyanis (119)-et átrendezve a

$$\vartheta''(x) - m^2 \vartheta(x) = 0 \quad (120)$$

összefüggést kapjuk. Keressük ennek a megoldását az előzőek alapján $ce^{\mu x}$ alakban, visszahelyettesítve (120)-ba a $(\mu^2 - m^2) ce^{\mu x} = 0$ karakterisztikus egyenletet kapjuk, a $\mu^2 - m^2$ karakterisztikus polinom gyökei pedig a $\mu_1 = +m$ és $\mu_2 = -m$. Eszerint a feladat megoldása a

$$\vartheta(x) = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \quad (121)$$

alakban keresendő, melyet hiperbolikus függvények segítségével a

$$\vartheta(x) = \tilde{c}_1 \cosh(mx) + \tilde{c}_2 \sinh(mx) \quad (122)$$

alakban is írhatunk, eszerint a konstansok között a $c_1 = \frac{\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2}{2}$ és $c_2 = \frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2}{2}$ összefüggések állnak fenn. Már csak annyi dolgunk van, hogy meghatározzuk a peremfeltételekhez illeszkedő megoldást – azaz az integrálási konstansokat –, melyhez célszerű a megoldás (122)-beli alakját használni. Az első peremfeltétel szerint

$$\vartheta(0) = \tilde{c}_1 \cosh 0 + \tilde{c}_2 \sinh 0 = \tilde{c}_1 = \vartheta_0, \quad (123)$$

így

$$\vartheta(h) = \vartheta_0 \sinh(mh) + \tilde{c}_2 \cosh(mh) = 0, \quad (124)$$

melyből $\tilde{c}_2 = -\vartheta_0 \frac{\sinh(mh)}{\cosh(mh)}$, amivel

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \cosh(mx) - \vartheta_0 \frac{\sinh(mh)}{\cosh(mh)} \sinh(mx). \quad (125)$$

Egyszerű számolással (a hiperbolikus függvényeket exponenciális alakra írva, rendezve, majd hiperbolikus alakra visszaírva) igazolható, hogy ez a

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \frac{\cosh[m(h-x)]}{\cosh(mh)} \quad (126)$$

alakra hozható.